MA2 – poznámky k přednášce 9. 3. 2020

Komplexní čísla; zavedení komplexní exponenciely a jejího užití při řešení obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu (s konstantními koeficienty).

1. Množina komplexních čísel – $\mathbb{C}$

– množina „nových" čísel – inspirace – problém řešení rovnice $x^2=-1$ (a obecnějších algebraických rovnic), která „nemá" řešení v oboru čísel reálných

„Zavedení" komplexních čísel (budeme značit $z \in \mathbb{C}$)

a) $z = [x, y]\,,\quad x, y \in R$

(geometricky jako „souřadnice bodů v k.s.s. v rovině" – „Gaussova rovina)

s aritmetickými operacemi: ($[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in \mathbb{C}$)

(1) $[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1+x_2;\ y_1+y_2]$

(2) $c\,[x, y] = [cx, cy]\,,\quad c \in R$

! (3) $[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = [x_1 x_2 - y_1 y_2;\ x_1 y_2 + x_2 y_1]$

Speciálně: $[x, 0]$ – reálná čísla, $[0, y]$ – ryze imaginární,

a $[0,1] \cdot [0,1] = [-1, 0]$ – tedy „má" v $\mathbb{C}$ řešení rovnice $z^2=-1$!

b) <u>algebraický tvar komplexního čísla</u>

lze: $z = [x, y] \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ zapsat i takto:
((1) a (2))

$$z = [x, 0] + [0, y] = x \cdot [1, 0] + y\,[0, 1]$$

zde zřejmě $[1,0] = 1$ (reálná) a $i = [0,1]$ je t.zv. jednotka imaginární, pak lze zapsat komplexní číslo z jako $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ – algebraický tvar komplexního čísla z

<u>a pak se „jednoduše" násobí (neboť $i^2 = -1$)</u>:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_1) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

(jako násobení dvojčlenů „v algebře")

<u>a také lze odvodit návod pro dělení číslem $z \neq 0$</u>
($0 = [0,0] = 0 + i0$):

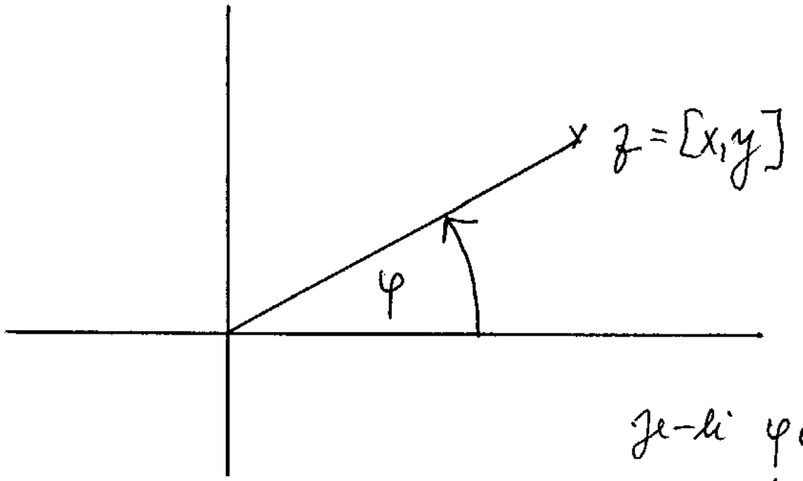
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i \quad \left(= \frac{x - iy}{x^2+y^2} \right)$$

Číslo <u>$x - iy = \bar{z}$ – komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$</u>

a <u>$\sqrt{x^2+y^2} = |z|$ – absolutní hodnota čísla $z \in \mathbb{C}$</u>

(geometricky v Gaussově rovině
$|z|$ – vzdálenost bodu $z = [x, y]$
od počátku $[0,0]$)

c) goniometrický tvar komplexního čísla



$z = [x,y] \neq [0,0]$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

φ – argument čísla z

(φ – je dáno až na $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

Je-li $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ – pak φ je tzv. hlavní hodnota argumentu čísla z a značí se $\varphi = \operatorname{Arg} z$ ($\in \langle 0, 2\pi)$)

Pak lze vyjádřit $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

spec. pro $|z|=1$: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (komplexní jednotky – „body" na jednotkové kružnici, $S=[0,0]$)

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru se „snadno" násobí (tj. i umocňují) a dělí:

(označme $\underset{(\neq 0)}{z_j} = |z_j|(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, $j=1,2$)

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) \right)$$

$$(z_2 \neq 0) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2) \right)$$

(spec. $\underset{(z\neq 0)}{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{|z|}\left(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) \right)$)

a $\left(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

(Moivreova věta)

a pak odmocnina se definuje: $(a \in \mathbb{C})$

$$\sqrt[n]{a}_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, z^n = a\}\,;$$

pak $|z| = \sqrt[n]{|a|}$ („reálná" odmocnina n-tá)

a je-li $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

pak $\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$(\alpha = \operatorname{Arg} a)$

Speciálně – příklad pro $n = 2$

$a < 0$, pak $a = |a|(\cos\pi + i\sin\pi)$ $(\pi = \operatorname{Arg} a)$,

hledáme $z \in \mathbb{C}$ tak, aby $z^2 = a$:

označme-li $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pak

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \quad \text{a}$$

má platit $|z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = |a|(\cos\pi + i\sin\pi)$,

tedy: (i) $|z| = \sqrt{|a|}$

a (ii) $2\varphi_k = \pi + 2k\pi$, tj. $\varphi_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1$

tj. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

a dostaneme:

$$z_1 = \sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{|a|},$$

$$z_2 = \sqrt{|a|}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{|a|}.$$

A nyní komplexní exponenciela:

„Známe-li" komplexní jednotky $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$
označme „$z(\varphi)$",
„tak platí":

$$(1) \quad z(\varphi_1)\cdot z(\varphi_2) = z(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$(2) \quad \frac{1}{z(\varphi)} = z(-\varphi)$$

$$((1)\Rightarrow)\ (3) \quad (z(\varphi))^n = z(n\varphi)$$

(1)-(3) – „podobné" vlastnostem exponenciely:
označme „pokusně" $\underline{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$, $\varphi\in R$

A pak lze definovat (a odtud jedna z definic „komplexní" exponenciely):

$$\underline{e^{a+ib} = e^{a}\cdot e^{ib} = e^{a}(\cos b + i\sin b)}, \quad a,b\in R$$

($a,b\in R$, tj. e^a – „reálná" exponenciela
$\cos b, \sin b$ – „známé" funkce)

A nyní už jsme „blízko" tomu, co by mohlo „znamenat"

$\underline{(?)\ \ y(x) = e^{(\alpha\pm i\beta)x}}$, když $\lambda = \alpha\pm i\beta$ $(\alpha,\beta\in R)$, $x\in R$
jsou komplexní kořeny charakteristické rovnice (diferenciální rovnice)

Pokud chápeme $y(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$,
abychom mohli funkci $y(x)$ jako „vhodné" vyjádření řešení obyčejné lineární diferenciální rovnice, než-li jsme „uměl" derivovat fci $y(x)$, tj. obecně, uměl derivovat t.zv. komplexní funkce reálné proměnné, tj.

$$f: M \subset R \to C \quad , \text{ tedy}$$

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x) \;, \quad x \in M \;, \; f_1, f_2 : M \subset R \to R$$

Funkci $f(x)$ lze také brát „jako uspořádanou dvojici reálných funkcí", tj.

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x)] \;, \quad x \in M, \; f_1, f_2 : M \subset R \to R$$

(a podrobněji budeme takového vektorové fce probírat)

Ukážeme, že (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = [\lim\limits_{x\to a} f_1(x), \lim\limits_{x\to a} f_2(x)]$,

(2) f je spojitá v bodě $x=a \Leftrightarrow f_1(x)$ i $f_2(x)$ jsou funkce spojité v bodě $x=a$

(3) $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0} \,,\, \frac{f_2(x)-f_2(x)}{x-x_0} \right]$$

$$= [f_1'(x_0) \,,\, f_2'(x_0)]$$

(pokud existují $f_1'(x_0), f_2'(x_0)$).

Tedy, v algebraickém tvaru ($f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$)

$$(*) \qquad \underline{f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x) \quad (\text{ex.-li } f_1'(x), f_2'(x))}$$

<u>Tedy:</u>

$$(e^{ix})' = (\cos x + i \sin x)' = -\sin x + i \cos x =$$
$$= i(\cos x + i \sin x) \quad (i.i = -1),\ x \in R$$

tj. $(e^{ix})' = i e^{ix}$ (další „podobnost" s e^x)

a také platí: $\underline{\left(e^{(\alpha+i\beta)x}\right)' = (\alpha+i\beta)\, e^{(\alpha+i\beta)x}}$, $x \in R$, $\alpha, \beta \in R$

(ověření – $\left(e^{(\alpha+i\beta)x}\right)' = \left(e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}\right)' = \left(e^{\alpha x} \cos\beta x + i e^{\alpha x} \sin\beta x\right)'$
a dále „derivace" dle (*) a součinu reálných fcí)
(nebo jednodušší způsob – užít $(e^{i\beta x})' = i\beta e^{i\beta x}$)

A nyní – mějme diferenciální rovnici

$$(**) \qquad y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in R$$

tak, že kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

jsou komplexní čísla $\underline{\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \beta \neq 0,\ \alpha, \beta \in R}$

Ukážeme, že $\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$ i $\tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$

jsou řešení dané rovnice:

Protože opět platí (i pro $\lambda \in \mathbb{C}$) : $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$,
tak po dosazení $\tilde{y}_1(x)$ (resp. $\tilde{y}_2(x)$) do rovnice (**)
máme (λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice)

$$(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)\, e^{\lambda_1 x} = 0 \; .$$

(a stejně pro λ_2)

Díky linearitě $D_2(y) = y'' + py' + qy$ dostáváme:

Je-li $y(x) = \operatorname{Re} y(x) + i \operatorname{Im} y(x)$, pak platí-li

$$0 = \left((\operatorname{Re} y(x))'' + p(\operatorname{Re} y)' + q \operatorname{Re} y \right) + i\left((\operatorname{Im} y(x))'' + p(\operatorname{Im} y(x))' + \operatorname{Im} y(x) \right),$$

$(= 0 + i0)$, je také

$$(\operatorname{Re} y(x))'' + p(\operatorname{Re} y(x))' + q(\operatorname{Re} y(x)) = 0$$

(a stejně) pro $(\operatorname{Im} y(x))'' + p(\operatorname{Im} y(x))' + \cancel{q} \operatorname{Im} y(x) = 0$

tj. reálná i imaginární část „komplexního" řešení jsou řešení – a reálná – tedy odtud:

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i \sin\beta x),$$

tj. reálný fundamentální systém (který jsme „odkládli") nám „vyšel":

$$\underline{y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \;, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad x \in \mathbb{R}}$$

Příklad: (z přednášky 4.3.)

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \quad , \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$$

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$

Řešení užitím komplexní exponenciely (tj. pomocí „komplexního fundamentálního systému" $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)$):

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(-2+i)x} = e^{-2x}(\cos x + i \sin x) \quad , \; x \in \mathbb{R}$$
$$\tilde{y}_2(x) = e^{(-2-i)x} = e^{-2x}(\cos x - i \sin x) \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

a odtud též $y_1(x) = e^{-2x} \cos x \quad (= \operatorname{Re} \tilde{y}_1(x))$

$y_2(x) = e^{-2x} \sin x \quad (= \operatorname{Im} \tilde{y}_2(x))$

Zkusme najít řešení počáteční úlohy:

obecné „komplexní" řešení:

$$\tilde{y}(x) = c_1 e^{(-2+i)x} + c_2 e^{(-2-i)x} \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{C} \; (!)$$

a počáteční podmínky vedou k soustavě rovnic pro $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$: $\quad (e^{\lambda 0} = e^{\alpha \cdot 0}(\cos \beta \cdot 0 + i \sin 0) = 1)$

$$c_1 + c_2 = 1$$
$$(-2+i)c_1 + (-2-i)c_2 = 2$$

Dostaneme (1. rovnici vynásobíme $(2+i)$ a sečteme s 2. rovnicí)

$$[(2+i)+(-2+i)]\,c_1 = 4+i$$

tj.

$$2i \cdot c_1 = 4+i$$

a pak

$$\underline{c_1} = \frac{4+i}{2i} = \underline{+\tfrac{1}{2} - 2i}$$

a

$$\underline{c_2} = 1 - c_1 = \underline{+\tfrac{1}{2} + 2i}$$

tedy, řešení počáteční úlohy v „komplexním" (zdá se) tvaru je

$$y_{poč}(x) = \left(\tfrac{1}{2} - 2i\right)\left(e^{-2x}\cos x + i\sin x \cdot e^{-2x}\right) +$$

$$+ \left(\tfrac{1}{2} + 2i\right)\left(e^{-2x}\cos x - i e^{-2x}\sin x\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{-2x}\cos x + 2e^{-2x}\sin x + i\left(-2\cos x + \tfrac{1}{2}\sin x\right)e^{-2x} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}e^{-2x}\cos x + 2e^{-2x}\sin x + i\left(2\cos x - \tfrac{1}{2}\sin x\right)e^{-2x},$$

tj. $\underline{y_{poč}(x) = e^{-2x}\cos x + 4e^{-2x}\sin x \quad , x \in R}$

$$\left(= e^{-2x}(\cos x + 4\sin x)\right) -$$

– tj. reálné řešení vyšlo i užitím komplexního fundamentálního systému.